

INVESTIGACIÓN SOBRE JUEGOS, INTERACCIÓN Y CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS*

EDO, MERCÈ y DEULOFEU, JORDI

Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals

Universitat Autònoma de Barcelona

Meque.Edo@uab.es

Jordi.Deulofeu@uab.es

Resumen. En este artículo se presentan resultados de una investigación sobre aprendizajes de matemáticas realizados en un contexto de juego de mesa en el marco escolar. Se indaga sobre: presencia de contenidos matemáticos en el contexto de juego, papel que ejerce la influencia educativa de la maestra y presencia de la influencia educativa entre alumnos en el proceso de aprendizaje de contenidos matemáticos.

Palabras clave. Juegos de mesa, aprendizajes matemáticos, interactividad, traspaso del control, interacción entre alumnos, estructura de interacción social.

Results from a research on games, interaction and construction of mathematical knowledge

Summary. We present research findings about mathematical learning in a class context with table games. We explore, on the one hand, the opportunities derived from this class context in relation to mathematics learning and, on the other, the role of the teacher. The peers' influence among them is also explored.

Keywords. Table games, mathematics education, teacher-student interaction, control transfer, student-student interaction, social participation structure.

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS

Este trabajo se centra en el análisis de una práctica educativa con la finalidad de obtener evidencias en relación con algunos procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos realizados por alumnos de primer ciclo de primaria en un contexto de juego.

referencias al juego en todos los currículos del país (Edo, 2002). Sin embargo, disponemos de insuficientes datos que permitan concluir sobre la relación entre las situaciones didácticas con juegos de mesa y la construcción de conocimientos matemáticos.

El *juego* aparece repetidamente en propuestas didácticas de primaria y hallamos, en los apartados de matemáticas,

La investigación se centra en la utilización de juegos de mesa como base para el diseño e implementación de

actividades de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos en primaria. El objetivo general es comprender mejor cómo unos alumnos concretos aprenden contenidos matemáticos en una situación didáctica que incorpora juegos de mesa, a través de los procesos de interacción. Para ello, y a partir de la descripción e interpretación de un *Taller de juego y matemáticas*, se establecieron los siguientes *objetivos específicos*:

- 1) Identificar, en un contexto de juego, la presencia de contenidos matemáticos, susceptibles de convertirse en objetivos de aprendizaje por parte de los alumnos.
- 2) Identificar indicadores interpretables como mecanismos de influencia educativa por parte de la maestra relacionados con la cesión y el traspaso progresivo del control y la responsabilidad a los alumnos en su proceso de aprendizaje de contenidos matemáticos.
- 3) Identificar indicadores interpretables como influencia educativa de los alumnos en la interacción entre iguales.

En lo sucesivo se organiza el artículo en cuatro apartados. Primero, se revisan las referencias sobre *juego y matemáticas en instituciones escolares* y se comenta el marco adoptado para analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje. En segundo lugar, se presenta la metodología de investigación y, a continuación, el análisis de los datos y algunos resultados. Por último, se exponen conclusiones relativas a los objetivos específicos.

MARCO TEÓRICO

Existen numerosas propuestas didácticas y publicaciones de innovación en las que se relacionan juegos y matemáticas. Las más difundidas y con repercusión en educación infantil y primaria son: Kamii (1985) y Kamii y Devries (1980). También en nuestro país y en etapas educativas distintas, se han realizado investigaciones y propuestas didácticas (Gairín, 1990; Corbalán, 1997; Rochera, 1997), sobre juegos y matemáticas. No obstante, como señaló Guzmán (2005), aún se dispone de insuficientes resultados empíricos en este campo.

Deulofeu (2001) señala que muchos juegos utilizan la matemática en su desarrollo, ya sea por sus relaciones numéricas, por sus relaciones geométricas o, especialmente, por las características de algunos juegos que requieren el desarrollo de estrategias para intentar realizar la mejor jugada.

El uso de juegos en el marco escolar puede tomar como finalidad la comprensión de conceptos o la mejora de técnicas –juegos de conocimiento–, o bien la adquisición de métodos de resolución de problemas –juegos de estrategia– (Corbalán y Deulofeu, 1996). Nos interesan juegos que incidan en ambos aspectos, es decir, que generen situaciones problemáticas para cuyo abordaje sean necesarios conceptos y técnicas presentes en el currículo y, al mismo tiempo, su práctica promueva el descubrimiento y aplicación de estrategias. En este sentido, las

prácticas educativas escolares centradas en juegos y matemáticas pueden servir tanto para generar *entornos de resolución de problemas*, tal como expone Abrantes (1996), cuyo objetivo es crear ambientes que inciten a pensar matemáticamente, como para generar situaciones problema que pertenecen al dominio de objetos matemáticos más generales.

Esta investigación parte de un estudio previo (Edo, 1996) en el que mediante un pretest y un postest, antes y después (de varias sesiones) de cada juego, se analizó el aumento de la capacidad de cálculo mental de los jugadores. La investigación se centró en la mejora de técnicas matemáticas de los alumnos y los resultados obtenidos mostraron un aumento significativo de las mismas. Pero entendemos que el potencial matemático del contexto de juego en el aula va más allá de los meros cálculos implicados en las jugadas. Destacamos dos posibles vínculos entre el contexto de juego y la matemática: *a)* la intuición, aplicación y discusión de los participantes acerca de posibles estrategias de juego; y *b)* la generación de situaciones de resolución de problemas en la organización y gestión de la actividad.

En este trabajo, el marco teórico psicológico de referencia adoptado es la concepción constructivista del aprendizaje y la enseñanza (Coll, 2001). Esta concepción sitúa la clave del aprendizaje escolar en la dinámica interna de los procesos de construcción del conocimiento: los alumnos son los agentes y responsables últimos de la construcción de significados sobre los contenidos escolares. Pero este proceso de construcción, de naturaleza individual, se considera inseparable de la actividad que desarrollan conjuntamente profesores y alumnos en el aula mientras llevan a cabo las tareas escolares; en consecuencia, esta construcción es también de naturaleza social. Desde esta perspectiva se considera que, en una situación didáctica, las interacciones, tanto entre profesor y alumnos como entre alumnos, constituyen el contexto en el que se proporcionan ayudas a los procesos de construcción de conocimientos que llevan a cabo los alumnos sobre los contenidos escolares, entre ellos los matemáticos (Colomina et al., 2001; Onrubia, Rochera y Barberá, 2001).

Diferentes estudios en esta línea han aportado evidencias sobre los mecanismos de influencia educativa, es decir, sobre las formas mediante las cuales se puede ayudar a los alumnos en sus aprendizajes. Uno de los mecanismos que opera en la interacción profesor-alumnos es el traspaso del control a medida que transcurre el proceso de enseñanza y aprendizaje (Colomina et al., 2001; Coll y Rochera, 2000).

Igualmente se ha constatado que los alumnos pueden aumentar su capacidad de realizar ayudas mutuas efectivas en el marco de la interacción que mantienen con sus compañeros. Concretamente «existe un creciente cuerpo de investigaciones que demuestra que una organización social cooperativa de las actividades de enseñanza y aprendizaje en el aula resulta, al menos bajo ciertas condiciones, más efectiva desde el punto de vista del rendimiento académico y la socialización de los alumnos que una organización competitiva o individualista.» (Colomina y Onrubia, 2001, p. 415)

El entorno de juego de mesa tiene un importante componente competitivo (algunos participantes ganan y otros pierden). Sin embargo, consideramos que esta actividad puede tener también un componente cooperativo. Colomina y Onrubia señalan, como efectos moduladores de una tarea cooperativa, de una parte, las características de la tarea; es necesario que la tarea tenga realmente un carácter colectivo y grupal (condición necesaria en la actividad de juego); y, de otra parte, la actuación del maestro. Es necesario realizar intervenciones tendientes a la cesión y el traspaso progresivo del control y la responsabilidad de la tarea al grupo de alumnos.

METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

Este trabajo se inscribe en el conjunto de investigaciones que abordan el estudio del comportamiento como resultado de procesos constructivos que tienen lugar en la misma situación de observación. Estas investigaciones, «descritas y etiquetadas de distintas formas: lewinianas, microetnográficas, etnometodológicas, etc.» (Coll, 1989, p. 274) tienen como finalidad última la comprensión de los fenómenos objeto de estudio en el contexto en el que se producen.

Recientemente en el área de la didáctica de las matemáticas, desde diferentes enfoques teóricos –Teoría de las situaciones (Brousseau, 1997), Teoría antropológica (Chevallard, 1999), Enfoque ontosemiótico (Godino, Contreras y Font, en prensa), Interaccionismo simbólico (Cobb y Bauersfeld, 1995; Voigt, 1994), etc.–, se han propuesto nuevas herramientas teóricas para analizar las interacciones profesor-alumno a propósito de una tarea matemática. Constructos como «contrato didáctico», «patrón de interacción», negociación de significados», «normas sociomatemáticas», «configuraciones didácticas», etc. son herramientas útiles para abordar esta problemática. Ahora bien, dado el tipo de actividad (juegos) y el nivel (primeras edades) se ha optado por una metodología de carácter general como es el *modelo conceptual y metodológico para el análisis de mecanismos de influencia educativa que operan en la interactividad* (Coll et al., 1995; Coll y Rochera, 2000). Mediante esta metodología se realiza un análisis, en tres fases sucesivas, de la *interactividad*, definida como «la articulación de las actuaciones del profesor y los alumnos alrededor de una tarea o de un contenido determinado» (Coll et al., 1995, p. 191), para poder captar al máximo la complejidad de la situación y al mismo tiempo las particularidades de las relaciones interpersonales. Se escogió este instrumento porque responde al marco psicológico seleccionado y ofrece elementos claros y pautas para el proceso de interpretación, sin ser prescriptivo, rígido ni cerrado.

Partiendo de este modelo, nuestra investigación consta de tres fases. Las dos primeras son de naturaleza general (macroanálisis) y recorren la totalidad de los datos. La tercera fase, más específica que las anteriores (microanálisis), analiza fragmentos de interacción con contenido matemático, aquéllos que, siendo claros en su identificación, comportan potencialmente oportunidades de aprendizaje de contenidos matemáticos.

El contexto de la experiencia. Los datos forman parte de una experiencia de innovación, *Taller de juegos y matemáticas*,

desarrollada en el ciclo inicial de primaria del CEIP Escola Bellaterra (Barcelona). El taller completo se compone de cinco secuencias didácticas para cada curso, cada una en torno a un juego (Edo, 2004). Cada secuencia contiene tres o cuatro sesiones de clase. Esta experiencia involucró 9 adultos y 98 alumnos de entre seis y ocho años. Aquí se presenta parte del análisis de algunos de estos registros.

Sujetos. El grupo de seguimiento estuvo formado por 4 alumnos de la misma edad procedentes de dos clases de segundo de primaria. En el proceso de selección, aleatorio, se tuvo en cuenta que hubiera igual número de integrantes por género. La maestra que intervino con este grupo en el taller había sido ocho años tutora del ciclo inicial en esta escuela, aunque en el momento de la experimentación no lo era.

Recogida de datos. De las cinco secuencias didácticas, de segundo curso de primaria, se seleccionaron dos para el análisis; las correspondientes a los juegos: «Te pido un...» y «Memori a 12».

«**Te pido un...**». Se reparten todas las cartas. Cada jugador descarta todas las parejas que sumen 10 y las coloca en su montón particular. El jugador que tiene el turno pide una carta a algún compañero, por ejemplo: «Te pido un 3». Si el compañero tiene la carta requerida debe dársela. El jugador debe enseñar su nueva pareja, el 7 y el 3, y añadirlo a su montón particular. El jugador continúa pidiendo cartas a quien quiera mientras consiga lo que pide. Cuando falla, pasa el turno a la persona que ha dicho: «¡No la tengo!» Termina el juego cuando todas las cartas han estado emparejadas. Gana quien ha conseguido más cartas.

«**Memori a 12**». Se colocan todas las cartas boca abajo encima la mesa, con una buena disposición espacial. Cada jugador, en su turno, debe girar dos cartas que, si sumadas dan 12, se las queda; si no, las gira de nuevo dejándolas donde estaban y pasa el turno al siguiente compañero. Termina el juego cuando todas las cartas han estado emparejadas. Gana quien haya conseguido más cartas.

La primera secuencia didáctica consta de cuatro sesiones y la segunda de tres, todas de unos 40 minutos. La frecuencia del taller es de una sesión semanal. Los datos se obtienen del registro en vídeo y audio de siete sesiones (S) del taller, correspondientes a dos secuencias didácticas (SD1 y SD2). El registro se describe y transcribe para el análisis.

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Como hemos señalado anteriormente, esta investigación se basa en el *modelo conceptual y metodológico para el análisis de mecanismos de influencia educativa que operan en la interactividad*, modelo que supone considerar, de manera relacionada, las actuaciones de la maestra y de los alumnos alrededor de una tarea, atender a la conexión entre la actividad discursiva y no discursiva y centrar la atención en la dimensión temporal, aspecto fundamental para captar el carácter constructivo de la interactividad y para identificar los mecanismos de influencia educativa. Siguiendo el modelo mencionado, el análisis de esta investigación consta de tres fases que se presentan a continuación. Cada fase contiene la unidad utilizada, ejemplos de datos y algunos resultados.

Fase 1. Identificación de los segmentos de interactividad (SI) y su evolución en dos secuencias didácticas: los mapas de interactividad

La unidad de análisis de la primera fase es el segmento de interactividad (SI). Estos segmentos son «formas específicas de organización de la actividad conjunta en el interior de las sesiones, caracterizadas por determinados patrones de actuaciones articuladas del profesor y de los alumnos así como por una cierta cohesión temática interna. Definen qué pueden hacer y decir los participantes en un momento dado de la actividad conjunta, y pueden cumplir funciones instruccionales particulares.» (Coll y Onrubia, 1994, p. 121)

El hecho de estudiar una actividad escolar muy pautada (juegos de mesa) ha permitido identificar un reducido número de segmentos de interactividad, concretamente cuatro:

- a) concreción de la estructura de la tarea o recapitulación;
- b) preparación de la partida;
- c) desarrollo de la partida;
- d) conclusión de la partida o valoración.

Esta primera fragmentación de los datos proporciona dos mapas de interactividad, uno para cada secuencia didáctica estudiada, en los cuales se observa la evolución del número, distribución y tiempos destinados a cada uno de los segmentos de interactividad dentro de cada sesión y dentro de cada secuencia.

Este primer análisis ofrece también la posibilidad de reconocer y ubicar en qué segmentos y en qué momentos se hace referencia –en conversaciones y acciones– a contenidos matemáticos. Se han identificado temáticas relacionadas con contenidos matemáticos en todos los SI identificados. Veamos un ejemplo de cada segmento de interactividad.

Ejemplo 1: SI de concreción de la estructura de la tarea o recapitulación

Sesión 3, partida 1, secuencia didáctica 2

(La maestra y los 4 alumnos dialogan sobre los contenidos que están aprendiendo en las últimas sesiones.)

Maestra: ¿Y qué podemos hacer para estar seguros que nueve y tres dan doce? ¿Hay algún truco?

María: Sí, el truco del diez. Pues mira, coges el nueve, lo conviertes en un diez y ya te da trece. Si restas uno al trece, ¿eh? Pues da doce.

[...]

Maestra: Siete y cinco, muy bien. ¿Cómo lo sabes? Siete y cinco.

Rubén: Es el truco de «le presta uno». Si el siete deja uno al cinco, se convierten en dos seis, y seis y seis... lo sabes de memoria.

Ejemplo 2: SI de preparación de partida

Sesión 3, partida 2, secuencia didáctica 2

(Los 4 alumnos colocan las 26 cartas en filas y columnas encima de la mesa para jugar al Memoria 12. Habitualmente la disposición era de 6 x 4 más una última fila con 2 cartas. En esta ocasión han colocado los naipes 5 x 5 y queda una sola carta en la última fila. Los alumnos se extrañan.)

Maestra: ¿Falta una carta aquí? ¿El otro día no sobraban dos cartas

aquí? (Señalando la última fila.) ¿Qué puede pasar?

Mónica: ¿Tiene que haber veintiséis?

Maestra: ¿Sí?

(Héctor, Rubén y Mónica intentan contar todas las cartas pero se hacen un lío...)

Maestra: (Cuenta en voz alta las cartas de la primera fila.) Uno, dos, tres, cuatro y cinco. (Luego, señalando la segunda fila.) ¿Y cinco?

Mónica y Héctor: Diez.

Maestra: (Señalando la tercera fila.): ¿Y cinco?

Héctor, María, Mónica y Rubén: Quince.

Maestra: (Señalando la cuarta.) ¿Y, cinco?

Héctor, María y Mónica: Veinte.

Maestra: Veinte. (Señalando la quinta fila.) ¿Veinte y cinco?

Todos: Veinticinco.

Maestra: (Señala la carta que está sola.) ¿Veinticinco y una?

Todos: Veintiséis.

Mónica: ¡Están todas! Está bien.

Ejemplo 3: SI de desarrollo de partida

Sesión 1, partida 2, secuencia didáctica 2

(Juegan 4 alumnos solos al Memoria a 12. Se trata de emparejar dos cartas que sumadas den 12.)

Rubén: (Gira una carta.) Un cinco... (Pensativo).

Mónica: (Mirando a Rubén.) Ya lo sé.

(Rubén no reacciona.)

Héctor: (A Mónica.) ¿Con el siete, no? ¿O es con el seis?

Mónica: ¿Seis?

Héctor: No, que dan once.

Rubén: (No presta atención al diálogo de los compañeros.) Es igual (Destapa al azar.)

Ejemplo 4: SI de conclusión de partida y de valoración

Sesión 2b, partida 3, secuencia didáctica 1

(Han jugado la partida 2 alumnas y la maestra. Hay 36 cartas. La maestra pide que miren quién ha ganado y se retira. Las alumnas cuentan los tres mazos obtenidos. Reaparece la maestra.)

Maestra: ¿Qué? ¿Quién ha ganado?

María: Empates a 12, ella y yo (Alumnas); y tú (Maestra), once.

Maestra: ¿Seguro que puede ser? ¿Yo once y vosotras doce?

María: Sí

Mónica: Sí.

Maestra: Al inicio, ¿cuántas teníamos cada una? (A María.) No, no cuentas; piensa.

Estos datos muestran ejemplos de las principales temáticas, vinculadas a contenidos matemáticos, presentes en cada segmento. El análisis de los datos nos ha permitido identificar diálogos y acciones centrados en contenidos matemáticos en todos los segmentos de interactividad.

Se observa que, en los segmentos de *preparación de la partida*, de *desarrollo de la partida* y de *conclusión de la partida*, el contenido matemático se relaciona con las tareas específicas del juego (reparto y organización del material, cálculos necesarios para realizar la jugada, estrategias para mejorar el juego, recuento y comparación final de las puntuaciones, etc.), aunque a menudo (no siempre) es la maestra quien convierte este contenido en materia colectiva de reflexión.

En relación con el SI de *concreción de la tarea y de recapitulación* los contenidos matemáticos presentes en los diálogos se desvinculan totalmente de la situación concreta en la que se generaron y, conducidos siempre por la maestra, se convierten en materia colectiva de reflexión.

En esta fase se ha comprobado la presencia de contenidos matemáticos en todos los segmentos de interactividad. Se detecta también que no todas las oportunidades matemáticas que genera el contexto son tratadas de la misma forma por los participantes. La intervención de la maestra y de los alumnos en la gestión de estas situaciones varía a lo largo de cada secuencia.

Fase 2. Identificación y caracterización de las actuaciones (A) interrelacionadas de los participantes y su evolución en el SI de desarrollo de partida

Para analizar las diferencias en la gestión de las situaciones con presencia de contenidos matemáticos aparecidas en los distintos SI y para estudiar los mecanismos de influencia educativa, realizamos un análisis de las actuaciones de los participantes y de su evolución. Aunque este análisis se ha realizado en todos los SI, en este artículo nos centramos solamente en las actuaciones de los SI de desarrollo de partida.

La unidad de análisis de esta fase es la identificación y caracterización de todas las actuaciones (A) dentro de cada SI. Se consideran las actuaciones como los «comportamientos [...] que exhiben los participantes en un determinado segmento de interactividad en función tanto del rol que asumen en éste, como de las condiciones que imponen la estructura de participación social y la estructura de la tarea académica.» (Rochea, 2000, p. 111)

La identificación y recuento de las actuaciones en cada SI permite realizar un estudio cuantitativo y cualitativo de la evolución de las actuaciones. Por ejemplo, permite comparar el número de actuaciones (absoluto y relativo) de la maestra y los alumnos en cada SI de cada sesión (en cada SD y entre secuencias) y obtener indicios de la evolución en la cesión del control (maestra) y del aumento de la actuación autónoma (alumnos). Veamos un ejemplo, en la tabla 1, de la secuencia didáctica 1.

En las sesiones 1 y 3 participan la maestra y los 4 alumnos. En la sesión 2a participa la maestra y 2 alumnos, los más aventajados. En la sesión 2b intervienen la maestra y los otros 2 alumnos, con más dificultades.

Los datos de esta secuencia muestran una tendencia de la maestra a ir reduciendo su participación y a aumentar la cesión de la gestión autónoma de la tarea. Pero muestran también una actuación diferenciada de la maestra según las capacidades de los alumnos con los que interactúa. La pauta de disminución de las actuaciones relativas de la maestra y aumento de las de los alumnos aparece en todos los SI estudiados, aunque no de forma lineal. Se reconocen las mismas tendencias en la SD2.

Para analizar la evolución de las actuaciones realizamos, simultáneamente al estudio de la cantidad de intervenciones (Tabla 1), el estudio de sus características en relación con el control por parte de la maestra (Tabla 2) y de la autonomía de los alumnos (Tabla 3).

La tabla 2 muestra la variación de las actuaciones de la maestra en la SD1, de los SI de desarrollo de la partida. Hay una tendencia a: reducción de las actuaciones que implican alto grado de control; aumento de participación guiada (consistente en plantear cuestiones que centran la

Tabla 1
Número absoluto y relativo de actuaciones maestra-alumnos SD1 en los SI de desarrollo de la partida.

Sesión 1				Sesión 2a				Sesión 2b				Sesión 3			
Maestra		Alumnos		Maestra		Alumnos		Maestra		Alumnos		Maestra		Alumnos	
96 ¹	38% ²	156	62%	50	37%	86	63%	123	46%	144	54%	9	6%	150	94%

¹ Cantidad de actuaciones transcritas.

² Porcentaje de actuaciones respecto al total de las mismas en la sesión.

Tabla 2
Porcentajes de actuaciones de la maestra que comportan distintos grados de control en la secuencia didáctica 1, de los SI de desarrollo de la partida.

Actuaciones de la maestra		Sesión 1	Sesión 2a	Sesión 2b	Sesión 3
Alto grado de control	Informa, explica, corrige.	45%	14%	20%	0% ³
Bajo grado de control	Plantea cuestión: pide información, pide identificación y corrección de errores.	32%	42%	40%	0%
	Refuerza actuación autónoma: repite, valora, valida la actuación de un alumno.	4%	8%	20%	0%
	Modela actuación pertinente: interviene como jugador.	19%	36%	20%	0%

³ En la sesión 3, el número de actuaciones de la maestra es tan reducido (9 sobre 159) que su distribución es irrelevante.

atención de los alumnos en aquellos aspectos relevantes de la tarea); diversificación de actuaciones en función de las capacidades mostradas por los alumnos; y cesión de la gestión de la tarea en la última sesión. Veamos ahora los datos correspondientes a las actuaciones de los alumnos en esta misma secuencia didáctica.

La tabla 3 muestra la variación de las actuaciones de los alumnos, paralela y simultánea a las actuaciones de la maestra mostradas en la tabla 2. En la tabla 3, comparando la sesión 1 y la sesión 3 (únicas en que participan todos los alumnos y la maestra), observamos una tendencia del alumnado al aumento de actuación autónoma pertinente, reducción de las dificultades y aumento del soporte de los compañeros cuando la maestra reduce el control de la acción. En relación a las sesiones 2a (alumnos más aventajados) y 2b (alumnos con más dificultades) se observan

unos porcentajes de actuaciones que reflejan claramente los distintos grados de autonomía de los alumnos implicados.

En la secuencia didáctica 2, la maestra varía de nuevo la estructura de participación social. En esta ocasión, en lugar de realizar una sesión separando los alumnos por niveles de competencia (SD1), estructura la participación social en pequeños grupos cooperativos de dos o más personas por equipo. Estos equipos van variando sus integrantes, partida a partida (intervienen los propios alumnos en la decisión de la composición de los mismos) de forma que, a lo largo de la secuencia didáctica, se identifican cinco combinaciones distintas. Este cambio favorece el aumento de las actuaciones de ayuda de los alumnos entre ellos.

A continuación se consideran los datos (Tablas 4 y 5) que comparan (en porcentajes) las actuaciones iniciales y finales de los alumnos en las dos secuencias didácticas estudiadas.

Tabla 3
Porcentajes de actuaciones de los alumnos que comportan distintos grados de autonomía en la secuencia didáctica 1, en los SI de desarrollo de la partida.

Actuación de los alumnos		Sesión 1	Sesión 2a	Sesión 2b	Sesión 3
Bajo grado de autonomía	Actúan a requerimiento de la maestra, preguntan o responden a la maestra.	36%	39%	48%	6%
	Muestran dificultades, realizan acciones no pertinentes, errores.	16%	1%	19%	14%
Alto grado de autonomía	Actúan a requerimiento de un compañero, preguntan o responden a un compañero.	9%	5%	1%	15%
	Actúan espontáneamente realizando acciones pertinentes.	39%	55%	32%	65%

Tabla 4
Comparación de porcentaje de actuaciones de los alumnos al inicio y al final de la secuencia didáctica 1, en los SI de desarrollo de la partida.

Actuación de los alumnos SD1		Sesión 1	Sesión 3
Bajo grado de autonomía	Actúan a requerimiento de la maestra, preguntan o responden a la maestra.	36%	6%
	Muestran dificultades, realizan acciones no pertinentes, errores.	16%	14%
Alto grado de autonomía	Actúan a requerimiento de un compañero, preguntan o responden a un compañero.	9%	15%
	Actúan espontáneamente realizando acciones pertinentes.	39%	65%

Tabla 5
Comparación de porcentaje de actuaciones de los alumnos al inicio y al final de la secuencia didáctica 2, en los SI de desarrollo de la partida.

Actuación de los alumnos SD2		Sesión 1	Sesión 3
Bajo grado de autonomía	Actúan a requerimiento de la maestra, preguntan o responden a la maestra.	24%	2%
	Muestran dificultades, realizan acciones no pertinentes, errores.	16%	8%
Alto grado de autonomía	Actúan a requerimiento de un compañero, preguntan o responden a un compañero.	8%	27%
	Actúan espontáneamente realizando acciones pertinentes.	52%	63%

Comparando los datos de las tablas 4 y 5, es decir, los porcentajes de actuaciones de los alumnos al inicio y al final de cada secuencia didáctica estudiada, observamos que:

a) Aunque en el momento inicial de los dos juegos los alumnos muestran un porcentaje igual de actuaciones que conllevan dificultades, acciones no pertinentes y errores, en el momento final, este porcentaje se reduce a la mitad cuando han jugado en grupos cooperativos (SD2). No sucede lo mismo cuando han realizado sesiones separadas según niveles de competencia (SD1).

b) A pesar de que en el inicio de los dos juegos los alumnos muestran un porcentaje parecido de actuaciones inducidas por la interacción entre iguales, en el momento final, el andamiaje realizado por los compañeros se triplica cuando se ha jugado en grupos cooperativos (SD2). No sucede lo mismo cuando han realizado sesiones separadas según niveles de competencia (SD1).

c) En ambos casos (SD1 y SD2) existe una reducción importante de la dependencia de la maestra y un aumento de la actuación autónoma pertinente.

Esta fase nos ha permitido obtener resultados en relación con la influencia educativa de la maestra en cuanto a la cesión y el traspaso progresivo del control y la responsabilidad a los alumnos en su proceso de aprendizaje. También ha permitido identificar un mayor aumento de la interacción efectiva entre iguales (al participar en grupos cooperativos) comparando las dos estructuras de participación social organizadas por la maestra.

En el análisis de la segunda fase se han tenido en cuenta todas las actuaciones de los participantes en los SI de desarrollo de partida y su relación con el grado de control o autonomía, sin atender a las características de dichas actuaciones en cuanto a los contenidos matemáticos presentes en ellas. Esto es lo que vamos a considerar en la siguiente fase.

Fase 3. Selección y estudio de evolución de fragmentos de interacción con contenido matemático que comportan –potencialmente– oportunidades de aprendizaje matemático

Para analizar algunos procesos de enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos tomamos como unidad de análisis de la tercera fase los *fragmentos de interacción c. m.* (con contenido matemático).

Estos fragmentos (E/D/d), obtenidos de la transcripción de los datos, se determinan a través de las características de su inicio: un *error* (E), una expresión de *dificultad* (D) o una *demanda* (d) por parte de un alumno –en relación con algún contenido matemático: cálculo o estrategia–. Y de su final: el fragmento termina cuando los participantes dejan de hacer referencia al motivo que lo ha generado.

Para la identificación y estudio de los E/D/d se recurre de nuevo a la totalidad de los datos (transcripción de las dos secuencias didácticas) seleccionando los E/D/d aparecidos en cualquier SI.

El estudio de la evolución de estos fragmentos se realiza atendiendo a distintos parámetros. Por una parte, se caracteriza el número de actuaciones en cada E/D/d distinguiendo así tres tipos de fragmentos de acuerdo con su nivel de complejidad.

- a) Fragmentos tipo A: 3 o 4 actuaciones.
- b) Fragmentos tipo B: de 5 a 14 actuaciones.
- c) Fragmentos tipo C: de 15 a 40 actuaciones.

Por otra parte, se analizan los fragmentos de interacción con contenido matemático:

- resueltos positivamente y no resueltos;
- aparecidos en cada SI;
- donde interviene la maestra y donde actúan los alumnos solos;
- centrados en contenidos matemáticos de cálculo o estrategia de juego.

Las tablas 6, 7 y 8 muestran ejemplos de fragmentos E/D/d en torno a contenidos de estrategia y de cálculo.

Tabla 6

Fragmento tipo A, en SI de desarrollo de partida. Contenido matemático: estrategia. Sesión 2b, partida 2, SD1.

Transcripción		Actuaciones
Juegan las 2 alumnas y la maestra a «Te pido un...». La acción a realizar consiste en pedir una carta que junto con una propia sumen 10 y descartarlas. Tiene el turno María y le quedan pocas cartas. En una jugada anterior, María había pedido un «uno» a Mónica.		
María	(Mira sus cartas y hace ruidos con la boca mientras pasa el tiempo.) ¡Ay, dios mío, estoy perdida!	Dificultad
Mónica	(Se dirige a María). ¡Ah! María, si antes me has preguntado a mí, ¿quién lo tendrá?	Ayuda parcial
María	(Reaccionando enseguida y dirigiéndose a la maestra.) ¿Tienes un uno?	Corrige y resuelve

Tabla 7

Fragmento tipo B, en SI de desarrollo de partida. Contenido matemático: Cálculo. Sesión 2b, partida 2, SD1.

Transcripción		Actuaciones
Maestra y 2 alumnas juegan a «Te pido un...». Una vez repartidas todas las cartas cada jugador debe descartar todas las parejas que sumadas den 10.		
María	(Descarta la primera pareja, siete y dos; no descarta nada más.)	Error
Maestra	(A María) A ver, ¿esto es correcto? (Pone la mano encima de la única pareja que ha hecho María, un siete y un dos.)	Plantea cuestión
María	(Coge la carta con el dos.) ¡Ay!	Identifica error
Maestra	¿Qué era? Siete y ...	Plantea cuestión
Mónica	Tres.	Corrige
María	(Cambia el dos por un tres. Continúa teniendo una sola pareja encima de la mesa.)	Resuelve

Tabla 8

Fragmento tipo C, en SI de conclusión de partida y valoración. Contenido matemático: Cálculo. Sesión 3, partida 6, SD2.

Transcripción		Actuaciones
Ha terminado la partida de Memori a 12. Han jugado los 4 alumnos juntos (un solo equipo) contra la maestra. La maestra ha ganado dos parejas de cartas. En total hay 26 cartas.		
María	Las hemos ganado todas.	Error
Héctor	Veinticuatro parejas.	Error
Maestra	¿Veinticuatro parejas?	Plantea cuestión
Héctor	Sí. Si son veinti... ¡Ah, nooo!	Error Identifica error
Maestra	No, a ver...	Válida la identificación del error
María	Si habían veintiséis y restamos dos... veinticinco, vinticua...	Error
Maestra	No. Había veintiséis cartas. Y yo tengo éstas (Muestra sus cuatro cartas ganadas.)	Da información Ayuda parcial
Héctor	Tienes cuatro.	Responde a la maestra
Maestra	¿Y, tú cuántas cartas debes tener? ¿Veintiséis menos cuatro?	Plantea cuestión
Héctor	Diecinueve.	Error
María	Veinte.	Error
Maestra	¿Veintiséis menos cuatro?	Plantea cuestión
Héctor	Veinti... veintidós.	Resuelve
Maestra	Veintidós.	Válida la corrección
En este momento acaba el fragmento presentado (tipo C) y se inicia otro fragmento, con 37 intervenciones, centrado en la siguiente cuestión.		
Maestra	Y veintidós cartas, ¿cuántas parejas son?	

El fragmento de la tabla 8 es un ejemplo de situación generada por el contexto que provoca un proceso de resolución del problema en el que intervienen y resuelven los propios alumnos con la guía y la ayuda de la maestra.

Esta fase del estudio permite obtener resultados en relación con estrategias de cesión y traspaso del control por parte de la maestra en la gestión y de resolución de

errores, dificultades y demandas con contenidos matemáticos. También permite identificar indicadores del aumento de la influencia educativa entre iguales cuando la interacción versa sobre contenidos matemáticos.

De acuerdo con el análisis realizado presentamos a continuación algunos datos relevantes de cada secuencia didáctica estudiada para proceder a su comparación.

Tabla 9
Algunos datos del estudio de fragmentos E/D/d de la secuencia didáctica 1.

44 fragmentos estudiados: 24 inician con un Error, 20 inician con Dificultad o demanda	
34 interviene la maestra	10 actúan alumnos solos
Análisis de la actuación de la maestra 36 ocasiones: plantea cuestión. <i>Actuación predominante.</i> 5 ocasiones: corrige, resuelve el error, dificultad o demanda. <i>Actuación de menor aparición.</i>	Análisis de la efectividad de la interacción entre alumnos 6 fragmentos no se resuelven. 4 fragmentos se resuelven positivamente.

Tabla 10
Algunos datos del estudio de fragmentos E/D/d de la secuencia didáctica 2.

68 fragmentos estudiados: 26 inician con un Error, 42 inician con Dificultad o demanda	
25 interviene la maestra	43 actúan alumnos solos
Análisis de la actuación de la maestra 21 ocasiones: plantea cuestión. <i>Actuación predominante.</i> 2 ocasiones: corrige, resuelve el error, dificultad o demanda. <i>Actuación de menor aparición.</i>	Análisis de la efectividad de la interacción entre alumnos 11 fragmentos no se resuelven. 32 fragmentos se resuelven positivamente.

Tabla 11
Número de fragmentos (E/D/d) con contenidos matemáticos de cada partida y sesión en la secuencia didáctica 2.

SD2	S1		S2		S3	
	Partida 1	Partida 2	Partida 3	Partida 4	Partida 5	Partida 6
Cálculo	6	8	20	5	4	4
Estrategia	3	0	1	2	6	9
Total sesión	17		28		23	
En segmento de interactividad	17 en desarrollo de partida		27 en desarrollo de partida 1 en preparación de partida		17 en desarrollo de partida 6 en preparación y conclusión de partida	

En las tablas 9 y 10 observamos que la actuación predominante de la maestra en la gestión de errores, dificultades y demandas con contenidos matemáticos consiste en realizar ayudas ajustadas: *plantear la cuestión*, que centran el tema en el que hay que reflexionar. Implica a todos los alumnos en la detección y corrección de errores y dificultades, propios y de los compañeros, preguntando directamente a distintos alumnos, invitando a participar y, especialmente, corrigiendo ella misma en muy pocas ocasiones y, siempre, después de haber realizado otro tipo de actuaciones.

En relación con los E/D/d que gestionan los alumnos cuando actúan sin la presencia de la maestra, observamos, en las tablas 9 y 10, una clara evolución en cuanto al número de fragmentos que asumen y en cuanto al aumento de la efectividad de su actuación, especialmente en la segunda secuencia didáctica al jugar en grupos cooperativos. Consideremos, a continuación, tabla 11,

algunos datos sobre la distribución de los contenidos matemáticos en los E/D/d estudiados.

En relación con los contenidos matemáticos sobre los que versa cada fragmento estudiado se observa que al inicio de cada juego (ejemplo de SD2 en tabla 11), el mayor número de E/D/d se centra en los cálculos necesarios para realizar las jugadas (y aparecen en el S1 de desarrollo de la partida). Cuando este contenido deja de ser el centro de atención de aprendizaje aparecen más E/D/d centrados en aspectos de estrategia (en el mismo S1) y aparecen también más procesos de resolución de problemas generados por el contexto en los que intervienen o gestionan los mismos alumnos.

Estos E/D/d, centrados en interrogantes generados por el contexto a partir de un hecho contradictorio, un vacío de comprensión o la constatación de un error, tienen las siguientes características:

a) Tienden a ser fragmentos del tipo C, es decir, los más complejos, con un mayor número de intervenciones y que, por tanto, requieren un proceso de actividad conjunta más elaborado para llegar a una solución.

b) Aparecen principalmente en los SI de preparación de partida y de conclusión de partida o de valoración.

Recordemos que, en la fase 1 de análisis, identificamos distintos interrogantes generados por el contexto susceptibles de convertirse en un buen contenido matemático a gestionar por el alumnado, y constatamos que no todos estos interrogantes eran cedidos o compartidos con los alumnos para su resolución.

Los datos obtenidos en la 3a. fase permiten hacer la siguiente explicación: no todos los contenidos matemáticos presentes en un entorno de juego se atienden con la misma intensidad de forma simultánea. En las dos secuencias estudiadas reconocemos la siguiente pauta:

a) Al inicio de cada juego, el contenido matemático prioritario se centra en los cálculos necesarios para realizar las jugadas.

b) En la medida que este contenido va siendo asimilado aparecen más diálogos y acciones centrados en aspectos de estrategias de juego.

c) Al mismo tiempo aparecen más situaciones de resolución de problemas gestionadas por los alumnos y generadas por el mismo contexto.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

En la situación didáctica estudiada se han identificado *contenidos matemáticos*, presentes en el contexto de juego y susceptibles de convertirse en objetivo de aprendizaje en el primer ciclo de primaria en todos los segmentos de interactividad estudiados.

1) En los segmentos de *preparación de la partida*, de *desarrollo de la partida* y de *conclusión de la partida*, el contenido matemático se relaciona con las tareas específicas del juego (reparto y organización del material; cálculos necesarios para realizar la jugada, estrategias para mejorar el juego, recuento y comparación final de las puntuaciones). En diversas ocasiones estos contenidos aparecen en forma de interrogante generado por la misma situación (hecho contradictorio, vacío de comprensión, constatación de un error...), cuya resolución, cuando la maestra cede o comparte el interrogante con los alumnos, requiere de ellos un proceso heurístico de resolución de problemas.

2) En el segmento de *concreción de la tarea* y de *recapitulación*, los contenidos matemáticos presentes en los diálogos (cálculo y estrategia) se desvinculan de la situación concreta en la que se generaron y, conducidos por la maestra, se convierten en materia colectiva de reflexión.

3) En cuanto a los contenidos matemáticos en los que los participantes centran prioritariamente la atención se ha constatado, en los dos juegos estudiados, la secuencia siguiente: al inicio de cada juego, los participantes (alumnos y maestra) se centran en el dominio de los cálculos necesarios para realizar las jugadas; a medida que este contenido deja de ser el objetivo de aprendizaje, aparecen más diálogos y acciones centrados en las estrategias de juego y en resolución de interrogantes generados por el contexto que los alumnos viven como procesos de resolución de problemas.

En relación con la *influencia educativa que ejerce la maestra*, se ha constatado que ésta cede y traspasa progresivamente el control y la responsabilidad del aprendizaje a los alumnos al ir reduciendo el número y grado de las ayudas a medida que aquéllos muestran un mayor grado de autonomía. Entre las estrategias utilizadas para la cesión del control, se han identificado las siguientes:

1) La maestra implica a los alumnos en el proceso de detección y corrección de errores y dificultades propios y de los compañeros, preguntando directamente a distintos alumnos, invitando a participar y no corrigiendo los errores ella misma.

2) La maestra varía la estructura de participación social en las dos secuencias estudiadas, resultando más efectiva la variación consistente en estructurar la participación de los alumnos en pequeños grupos cooperativos.

3) La maestra centra la atención del grupo en distintos contenidos matemáticos. En primer lugar se centra en el dominio de los cálculos necesarios para jugar. Más adelante focaliza la atención tanto en las estrategias de juego como en las situaciones generadas por el contexto que se convierten en procesos de resolución de problemas.

Referente a la *influencia educativa que ejercen los alumnos entre sí*, los resultados coinciden y corroboran lo apuntado por Colomina y Onrubia, en relación, de una parte, con el aumento de la capacidad de ayudarse mutuamente y, de otra, con la efectividad que supone una organización social cooperativa. Este estudio permite identificar:

1) El aumento de la capacidad de los alumnos para ayudarse mutuamente y de la capacidad para aceptar y utilizar estas ayudas en su proceso de aprendizaje en un entorno de juego. Las ayudas son prácticamente inexistentes en las sesiones iniciales y numerosas en las finales.

2) El aumento de la capacidad para intervenir de manera efectiva cuando actúan solos. Frente a errores, dudas y dificultades con contenidos matemáticos aparecen, con el tiempo, diálogos más largos y complejos, únicamente entre alumnos, para llegar a soluciones efectivas y compartidas.

3) La organización social de los participantes consistente en pequeños grupos cooperativos (en comparación con estructuras no cooperativas) incrementa sustancialmente el número de interacciones entre iguales centradas en

contenidos matemáticos y al mismo tiempo aumenta la capacidad para resolver errores, dificultades y demandas sin la intervención de la maestra.

La investigación realizada nos permite concluir que el juego en el marco escolar de primaria crea un contexto con una variedad de contenidos matemáticos que permite diversificar los objetivos de aprendizaje de los alumnos implicados.

El estudio realizado del *Taller de juegos y matemáticas* permite concluir también que esta práctica educativa genera un contexto que, siendo gestionado desde una perspectiva constructivista de interacción entre todos los

participantes, favorece la construcción de distintos tipos de conocimientos matemáticos.

NOTAS

* Este artículo se ha realizado en el marco del proyecto sobre Pensamiento Crítico y Educación Matemática (conv. 8599, proy. 165004) del grupo PREMAT que forma parte de la «Xarxa de Recerca per a l'Educació Matemàtica i Científica (REMIC)», Ref. U2201 U9UAB 2005, financiada por el Departament d'Universitats i Recerca (DURSI) de la Generalitat de Catalunya, dentro del Pla de Recerca i Innovació (PRI) 2005-2008.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ABRANTES, P. (1996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *UNO*, 8, pp. 7-18.
- BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer A.P.
- COBB, P. y BAUERSFELD, H. (eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in class-room cultures*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Pub.
- COLL, C. (1989). *Conocimiento psicológico y práctica educativa*. Barcelona: Barcanova.
- COLL, C. (2001). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje, en Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (eds.). *Desarrollo psicológico y educación, 2: Psicología de la educación escolar*, pp. 157-186. Madrid: Alianza.
- COLL, C. y ONRUBIA, J. (1994). «Temporal dimension and interactive processes in teaching/learning activities: A theoretical and methodological challenge», en Mercer, N. y Coll, C. (eds.). *Explorations in socio-cultural studies*. Vol. 4: *Teaching, learning and interaction*. General Editors: P. del Río, A. Álvarez y J. Wertsch.
- COLL, C., COLOMINA, R., ONRUBIA, J. y ROCHERA, M.J. (1995). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de los mecanismos de influencia educativa, en Fernández Berrocal, P. y Melero, M.A. (eds.). *La interacción social en contextos educativos*. Madrid: Siglo XXI.
- COLL, C. y ROCHERA, M. J. (2000). Actividad conjunta y traspaso del control en tres secuencias didácticas sobre los primeros números de la serie natural. *Infancia y Aprendizaje*, 92, pp. 109-130.
- COLOMINA, R. y ONRUBIA, J. (2001). Interacción educativa y aprendizaje escolar: la interacción entre alumnos, en Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (eds.). *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar*, pp. 415-435. Madrid: Alianza.
- COLOMINA, R., ONRUBIA, J. y ROCHERA, M. J. (2001). Interactividad, mecanismos de influencia educativa y construcción del conocimiento en el aula, en Coll, C., Palacios, J. y Marchesi, A. (eds.). *Desarrollo psicológico y educación 2. Psicología de la educación escolar*, pp. 437-458. Madrid: Alianza.
- CORBALÁN, F. y DEULOFEU, J. (1996). Juegos manipulativos en la enseñanza de las matemáticas. *UNO*, 7, pp. 71-80.
- CORBALÁN, F. (1997). «Juegos de estrategia y resolución de problemas: análisis de estrategias y topología de jugadores en el alumnado de secundaria». Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- CHEVALLARD, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp. 221-265.
- DEULOFEU, J. (2001). *Una recreación matemática: historias, juegos y problemas*. Barcelona: Planeta
- EDO, M. (1996). «Taller de jocs al cicle inicial: disseny, experimentació i avaluació d'una situació didàctica per a la construcció conjunta de coneixements matemàtics». Treball de recerca de doctorat en didàctica de les ciències i les matemàtiques del Departament de Didàctica de les Matemàtiques i les Ciències Experimentals. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona.
- EDO, M. (2002). «Jocs, interacció i construcció de coneixements matemàtics». Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.
- EDO, M. (2004). Taller de juegos y matemáticas en el ciclo inicial de primaria. Desarrollo curricular. Estrategias e instrumentos, en Tomás, C. y Casas, M. (eds.). *Educación Primaria. Orientaciones y Recursos*. Barcelona: CISSPRAXIS.
- GAIRÍN, J. M. (1990). Efectos de la utilización de juegos educativos en la enseñanza de las matemáticas. *Educar*, 17, pp. 105-118.
- GODINO, J.D., CONTRERAS, A. y FONT, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (aceptado para su publicación).
- GUZMÁN, M. (2005). Juegos matemáticos en la enseñanza, en Martín, F. y Fuentes, I. (eds.). *Textos de Miguel de Guzmán*, pp. 23-60. Madrid: FESPM.
- KAMII, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética, implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.
- KAMII, C. y DEVRIES, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza: implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.
- ROCHERA, M.J. (1997). «Interactividad e influencia educativa: análisis de algunas actividades de enseñanza y aprendizaje de los primeros números de la serie natural en educación infantil». Tesis doctoral. Barcelona: Universidad de Barcelona.
- ROCHERA, M. J. (2000). Interacción y andamiaje en el aula: el papel de los errores en la influencia educativa. *Cultura y Educación*, 17-18, pp. 63-81.
- VOIGT, J. (1994). Negotiation of mathematical meaning and learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 26, pp. 275-298.

[Artículo recibido en diciembre de 2005 y aceptado en febrero de 2006]